Introducción a la Física

Con aplicaciones a ingeniería petrolera

Manuel Sandoval Martínez

Maricela García Ávalos

Gerardo E. Sepúlveda Palacios

Acerca de los autores.

Dr. Manuel Sandoval Martínez. Profesor de Tiempo Completo en la Carrera de Ingeniería Petrolera, en la Universidad Politécnica del Golfo de México. Es licenciado en Física, cuenta con una Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas. Obtuvo doctorado en Ciencias en Física Educativa en el Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

M.C. Maricela García Ávalos. Profesora de Tiempo Completo en la Carrera de Ingeniería Petrolera, en la Universidad Politécnica del Golfo de México. Es licenciada en Matemáticas, cuenta con una Maestría en Matemáticas Aplicadas en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

M.I Gerardo Enrique Sepúlveda Palacios. Profesor de Tiempo Completo en la Carrera de Ingeniería Petrolera, en la Universidad Politécnica del Golfo de México. Es Ingeniero Químico, cuenta con una Maestría en Ingeniería con Especialidad en Fluidos de Perforación en la Universidad Nacional Autónoma de México.

Competencias a desarrollar

Competencias a desarrollar. Capacidad de abstracción, análisis y síntesis. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica. Capacidad de organizar y planificar el tiempo. Capacidad de investigación. Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas. Capacidad creativa. Capacidad crítica y autocrítica. Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas. Capacidad de trabajo en equipo.

Estrategia General.
Inicio:

- Proyección del ejercicio o resolver; se solicita la lectura a un estudiante. Trazar un bosquejo o diagrama representativo del enunciado
- Pregunta: ¿qué conceptos o leyes están involucrados en este ejercicio? ¿cuál es la estrategia para resolverlo? Propuestas individuales

Desarrollo: (Formar equipos de 3 integrantes)

- Discutir en equipos la estrategia y decidir si es la correcta.
- Motivar a los equipos a explicar sus estrategias y respuestas paso a paso.
- Resolver en el pizarrón

Cierre:

- Proponer un nuevo ejercicio, que esté acorde al previo, pero deberá resolverse de manera individual en su totalidad.
- Después de cierto tiempo, se realiza co-evaluación (revisión del procedimiento en pares)
- Resolver en el pintarrón y discutir en el grupo los aciertos y errores.
  - ¿Qué aprendí de este ejercicio?
  - ¿Qué quedó claro y qué no?

Retroalimentación.

Solución de problemas de Krulik & Rudnick

La solución de problemas es una de las estrategias de habilidades del pensamiento que más utilizan los profesores para enseñarle a sus estudiantes a **cómo** pensar.

Definición de problema: “es una situación, cuantitativa o cualitativa, que confronta a un individuo o grupo de individuos y requiere de una solución y de la cual no se ve una aparente solución rápida o fácil”, Krulik & Rudnick (1980). Se ha encontrado que la enseñanza tradicional no tiene un enfoque en el cual se motive a los estudiantes a desarrollar su creatividad. La solución de problemas contextualizados puede desarrollar habilidades y competencias tanto genéricas como específicas. Esto permite que los estudiantes puedan transferir sus conocimientos a aplicaciones reales lo que ayuda a ver similitudes o patrones entre diversos problemas. La enseñanza actual debe preparar a los estudiantes para resolver problemas reales, por tal razón se debe enfocar más en la práctica que en la teoría.

La solución de problemas es un proceso o guía que las personas pueden aplicar a varias situaciones. El algoritmo de Krulik & Rudnick es el siguiente:

1. **Leer**.- Definir e interpretar el problema. Se comienza anotando palabras claves, qué se está preguntando en el problema, describirlo en palabras fáciles de interpretar.
2. **Explorar**. Se buscan patrones, conceptos o leyes que juegan un papel importante en el problema. Aquí se deben colocar diagramas o esquemas representativos del problema.
3. **Estrategia**.- Determinar los pasos a seguir para encontrar la solución del problema haciendo uso de las leyes o conceptos antes determinados.
4. **Resolver el problema**.- Llevar a cabo el plan elegido, siguiendo los pasos planteados en la estrategia.
5. **Extender la solución**.- Aquí se debe verificar la solución y hacer casos como, ¿qué ocurre si la variable *x* cambia de valores?

Introducción

Hay dos tipos generales de cantidades físicas, fuerza es un ejemplo de un tipo y temperatura es un ejemplo de otro tipo. Como sabemos por experiencia propia, las fuerzas pueden ser ejercidas en diferentes direcciones (la dirección es muy importante si estás tratando de clavar un clavo en la pared), mientras que no hay dirección asociada con la temperatura de tu cuerpo. Las cantidades físicas que contienen información acerca de su magnitud y dirección son llamadas cantidades vectoriales y son representadas por símbolos con una flecha (Figura 01) en la parte superior ($\vec{F}$, $\vec{v}$, etc.). Por ejemplo, la fuerza es una cantidad vectorial. Cuando empujas una puerta, tu empuje puede representarse con una flecha de fuerza; mientras más fuerte empujes, más larga será esa flecha. La dirección del empuje se representa por la dirección de esa flecha.

Figura 01. Representación de un vector

Las cantidades físicas que no contienen información acerca de la dirección son llamadas cantidades escalares y se escriben usando símbolos cursivos (*m, T*, etc.). La masa es una cantidad escalar, así como la temperatura. Para manejar cantidades escalares, se usan reglas aritméticas y algebraicas estándar – adición, sustracción, multiplicación, división, etc. Sumas, sustraes, multiplicas y divides escalares como si fueran números ordinarios. Los vectores son más complicados. Por ejemplo, supongamos que dos personas jalan de un trineo ejerciendo fuerzas iguales de tensión a un ángulo de 30° uno con respecto al otro. ¿La tensión resultante es dos veces la tensión ejercida por cada persona, o es más o es menos? ¿En qué dirección está la tensión resultante? Para responder estas preguntas, necesitamos aprender cómo realizar operaciones matemáticas con vectores. Estas reglas se introducen en los próximos capítulos ya que las necesitamos para diversas áreas de la ingeniería petrolera.

Capítulo I. Conversión de Unidades

1.1 Sistemas de unidades
1.1.1 Internacional
1.1.2 Británico
1.2 Conversión de unidades
1.2.1 Algoritmo de conversión unidimensional
1.2.2 Algoritmo de conversión doble
1.3 Conversión de área, volumen, flujo del S.I al S. Británico y
1.4 Aplicaciones a IP

Sistemas de unidades

Hoy existen en el mundo cuatro sistemas de unidades de medida, dos de ellos denominados gravitacionales y los otros denominados absolutos. Son sistemas gravitacionales aquellos que tienen como unidad fundamental la unidad de fuerza, siendo en ellos la unidad de masa, una unidad derivada. Son sistemas absolutos aquellos que tienen como unidad fundamental la unidad de masa, siendo la unidad de fuerza una unidad derivada.

Los dos sistemas gravitacionales son:

- El británico.- que tiene como unidades fundamentales: de fuerza, la libra fuerza (lbf), de longitud, el pie (ft), y de tiempo, el segundo (s).
- El métrico.- de unidades fundamentales: de fuerza, el kilogramo fuerza (Kgf), de longitud, el metro (m), y de tiempo el segundo (s); reciben también el nombre de sistema mks

Los de sistema absoluto son:

- El métrico de unidades fundamentales: de masa, el gramo-masa (gr), de longitud, el centímetro (cm), y de tiempo el segundo (s).
- El sistema internacional de unidades fundamentales: de masa, el kilogramo (Kg), de longitud, el metro (m), y de tiempo el segundo (s).

Como los sistemas se adaptan de acuerdo a las necesidades de cada país en el mundo, debemos seguir un método claro para convertir unidades de un sistema a otra tomando como base una tabla de equivalencias entre ellos.

Algoritmo de Conversión de unidades

Algoritmo de conversión unidimensional

La conversión de unidades unidimensionales son las más sencillas de realizar ya que solo involucran dos tipos de unidades, por cada aplicación que se haga del mismo. El procedimiento se puede escribir de la siguiente manera.

Algoritmo 1.1

1. Identifique los sistemas de unidades involucrados
2. Busque las equivalencias de las unidades a convertir
3. Realice el siguiente producto:

$$(\text{cantidad a convertir})\ (\text{factor de conversión})$$

4. Verifique que las unidades se cancelen de manera adecuada

Ejemplo 1.1.- Realizar las conversiones que se indican a continuación.

a) $15 min\ a\ hrs$

De acuerdo al Algoritmo 1.1, se pueden identificar que las unidades involucradas son minutos y horas, del punto 2 encontramos las equivalencias $1hr = 60min$, procedemos de acuerdo al punto 3

$$(96\text{min})\left(\frac{1\text{hr}}{60\text{min}}\right) = 1.6\text{hrs}$$

Como se puede observar, las unidades que se cancelan son minutos, prevaleciendo la unidad que se solicita.

Algoritmo de conversión bidimensional

La conversión de unidades bidimensionales es también muy sencilla de realizar, se involucran cuatro tipos de unidades y se debe realizar un producto doble de unidades. El procedimiento se puede escribir de la siguiente manera.

Algoritmo 1.2

1. Identifique los sistemas de unidades involucrados
2. Busque las equivalencias de las unidades a convertir
3. Realice el siguiente producto:

$$(\text{cantidad a convertir})\ (\text{factor de conversión1})(\text{factor de conversión2})$$

4. Verifique que las unidades se cancelen de manera adecuada

Ejemplo 1.2.- Realizar las conversiones que se indican a continuación.

a) $12.57 Km/hr\ a\ m/s$

De acuerdo al Algoritmo 1.2, se pueden identificar que las unidades involucradas son kilómetros, horas, metros y segundos; del punto 2 encontramos las equivalencias:

$$\boxed{\begin{array}{c} 1Km = 1000m \\ 1hr = 3600s \end{array}}$$

Ahora procedemos de acuerdo al punto 3

$$\left(\frac{12.57\text{Km}}{\text{hr}}\right)\left(\frac{1000\text{m}}{1\text{Km}}\right)\left(\frac{1\text{hr}}{3600\text{s}}\right) = 3.4916\ {}^{\text{m}}/_{\text{s}}$$

Como se puede observar, las unidades que se cancelan son kilómetros y horas, prevaleciendo las unidades que se solicitan.

Conversiones de unidades de área

Para este tipo de conversiones se procede conforme al Algoritmo 1.1, solo que las equivalencias deben estar elevadas al cuadrado, por ejemplo

$$1m = 100cm$$

$$1m^2 = 10{,}000cm^2$$

Ejemplo 1.3.- Realizar las conversiones que se indican a continuación.

a) $6.89plg2\ a\ cm^2$

De acuerdo al Algoritmo 1.1, las unidades involucradas son pulgadas cuadradas y centímetros cuadrados. Entonces las equivalencias son

$$1plg^2 = 6.4516cm^2$$

Siguiendo al puntos 3 del algoritmo:

$$(6.89plg^2)\left(\frac{6.4516cm^2}{1plg^2}\right) = 44.4515cm^2$$

Las unidades que se cancelan son plg^2.

Conversiones de unidades de volumen

Para este tipo de conversiones se procede conforme al Algoritmo 1.1, solo que las equivalencias deben estar elevadas al cubo, por ejemplo

$$1plg = 2.54cm$$

$$1plg^3 = 16.3870cm^3$$

Ejemplo 1.4.- Realizar las conversiones que se indican a continuación.

a) $5184\ plg^3\ a\ m^3$

De acuerdo al Algoritmo 1.1, las unidades involucradas son pulgadas cúbicas y metros cúbicos. Entonces las equivalencias son

$$1plg^3 = 1.6387x10^{-5}m^3$$

Siguiendo al puntos 3 del algoritmo:

$$(5184\text{plg}^3)\left(\frac{1.6387\text{x}10^{-5}\text{m}^3}{\text{plg}^3}\right) = 0.08495\text{m}^3$$

Las unidades que se cancelan son plg^3.

Ejemplo 1.5.- Una pirámide tiene una altura de $481ft$ y su base cubre un área de $13\ acres$ ($1acre = 43,560ft^2$). Calcule el volumen de esta pirámide en metros cúbicos.

Solución utilizando R&K.

1. Leer.- *Volumen, área, conversión de unidades*
2. Explorar.- $altura = 481ft$; $\acute{a}rea = 13acres$

Figura 1.1 Gran pirámide de Cholula

3. Estrategia.- Calcular el área de la base, aplicar la fórmula $\mathrm{V} = (^1/_3)\mathrm{Bh}$ y después convertir a ft^2
4. Resolver.-

Comenzamos calculando la base como sigue

$$\mathrm{B} = (\mathrm{largo})(\mathrm{ancho}) = 13\ \mathrm{acres} = 566{,}280\mathrm{ft}^2$$

Y con esto el volumen será

$$V = (^1/_3)Bh = (566{,}280ft^2)(481ft) = 272{,}380{,}680ft^3$$

5. Extender.- ¿Qué limitantes tiene la fórmula del volumen? ¿En realidad se podría calcular el volumen de la pirámide de Cholula con esa expresión?

Aplicaciones a Ingeniería Petrolera

En esta sección se resolverán diversos ejemplos de conversión de unidades aplicados a ingeniería petrolera. Iniciaremos con algunos ejemplos sencillos y posteriormente se introducirán algunos problemas un poco más complicados.

Ejemplo 1.6.- Un manómetro de vacío está conectado a un tanque y da una lectura de $30kPa$ en un lugar donde la presión barométrica es de $755mmHg$. Determine la presión absoluta en el tanque.

Solución utilizando R&K.

1. Leer.- *Presión manométrica, columna de agua, conversión de unidades*
2. Explorar.- $\Delta\mathrm{P} = 30\mathrm{KPa};\ \mathrm{P}_0 = 755mmHg$

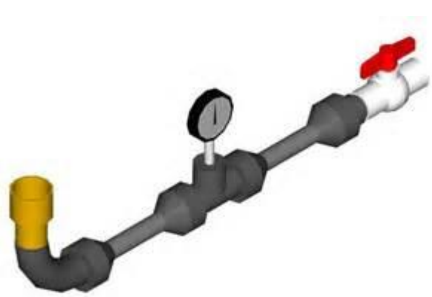


Figura 1.2 Manómetro en tubería

3. Estrategia.- Convertir la presión atmosférica a Pa y utilizar la definición de presión manométrica.
4. Resolver.- La presión manométrica se define como

$$\Delta \mathrm{P} = \mathrm{P}_0 - \mathrm{P}$$

donde P_0 es la presión atmosférica y P es la presión absoluta. Además la presión debida a una columna de agua es $P = \rho g h$. Así que:

$$\mathrm{P}_0 = \rho \mathrm{gh} = \left(13600\ {}^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{m}^3}\right)\left(9.81\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}\right)(0.755\mathrm{m}) = 100{,}729.08\mathrm{Pa}$$

Entonces la presión absoluta será

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 - \Delta \mathrm{P} = 70{,}729.08\mathrm{Pa}$$

5. Extender.- ¿Qué pasaría con la presión manométrica si la presión absoluta aumenta o disminuye?

Ejemplo 1.7.- La densidad del aceite de oliva $298K$ es $919\mathrm{Kg/m^3}$, transforme esta unidad según se indica:

a) gr/cm^3

b) lb/ft^3.

Solución para a).-

Haciendo uso de la Tabla 1, del Anexo 1 se tiene que

$$\left(919\,\frac{Kg}{m^3}\right)\left(\frac{1000gr}{1Kg}\right)\left(\frac{1m^3}{10^6 cm^3}\right) = 0.919\,\frac{gr}{cm^3}$$

Solución para b).-

$$\left(919\,\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(\frac{\mathrm{lbm}}{0.454\mathrm{Kg}}\right)\left(\frac{0.02831\mathrm{m}^3}{\mathrm{ft}}\right) = 57.3059\,\frac{\mathrm{lbm}}{\mathrm{ft}^3}$$

Ejemplo 1.8.- La gravedad específica del ácido sulfúrico es de 1.8, calcular su densidad en:

a) kg/m^3

b) gr/cm^3

c) lb/ft^3

Solución.

La gravedad específica (o densidad relativa) se define como $SG = \frac{\rho}{\rho_{Agua}}$. De aquí, la densidad del fluido será el producto de la densidad del agua con la gravedad específica:

a) Tomando en cuenta que la densidad del agua es $1000\ ^{Kg}/_{m^3}$, tendremos:

$$\rho = SG\rho_{Agua} = 1.8\left(1000\ ^{Kg}/_{m^3}\right) = 1800\ ^{Kg}/_{m^3}$$

b) Tomando en cuenta que la densidad del agua es $1\ ^{gr}/_{cm^3}$, tendremos:

$$\rho = SG\rho_{Agua} = 1.8\left(1\ ^{gr}/_{cm^3}\right) = 1.8\ ^{gr}/_{cm^3}$$

c) Para este inciso, tendremos

$$\rho = \left(1800\frac{Kg}{m^3}\right)\left(\frac{lbm}{0.454Kg}\right)\left(\frac{0.02831m^3}{ft}\right) = 112.2694\frac{lbm}{ft^3}$$

Nota: Los fluidos de perforación deben tener una densidad, cuyo intervalo debe estar entre 1.0 y $1.50\ ^{gr}/_{cm^3}$ para que sean funcionales dentro del pozo.

Ejemplo 1.9.- Después de perforar la primera etapa de un pozo, el ingeniero químico a cargo mide la densidad del fluido de perforación ($\rho_1 = 1.053\, {}^{\mathrm{gr}}/_{\mathrm{cm}^3}$); para la segunda etapa se requiere de un fluido con una densidad 20% mayor a la de ρ_1. El técnico prepara el fluido y mide una densidad $\rho_2 = 14.76\, {}^{\mathrm{lb}}/_{\mathrm{gal}}$. El ingeniero indica que ese fluido no funcionará, ¿está de acuerdo con ese juicio?

Solución utilizando R&K.

1. Leer.- *Densidad, fluido de perforación, cambio en la densidad*
2. Explorar.- $\rho_1 = 1.053\, {}^{\mathrm{gr}}/_{\mathrm{cm}^3}$, $\rho_2 = 14.76\, {}^{\mathrm{lb}}/_{\mathrm{gal}}$, *aumento en 20%*
3. Estrategia.- Calcular la densidad del nuevo fluido y convertir a $\frac{\mathrm{lbm}}{\mathrm{ft}^3}$
4. Resolver.- Se procede a calcular la densidad del segundo fluido

$$\rho_2 = \rho_1(1 + 0.2)\, {}^{\mathrm{gr}}/_{\mathrm{cm}^3} = 1.074\, {}^{\mathrm{gr}}/_{\mathrm{cm}^3}$$

ahora se procede a convertir las unidades de acuerdo al Algoritmo 1.1.

$$1\mathrm{lb} = 0.454\mathrm{Kg}$$

$$1\mathrm{gal} = 3.785\mathrm{ltr}$$

$$\rho_2 = \left(1.704\,\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{cm}^3}\right)\left(\frac{3785\mathrm{cm}^3}{1\mathrm{gal}}\right)\left(\frac{1\mathrm{lb}}{454\mathrm{gr}}\right) = 14.506\,\frac{\mathrm{lbm}}{\mathrm{ft}^3}$$

De acuerdo a nuestro resultado, la densidad calculada por el técnico no cumple con las especificaciones otorgadas por el ingeniero.

5. Extender.- ¿Qué posibles repercusiones podría traer este error a la perforación?

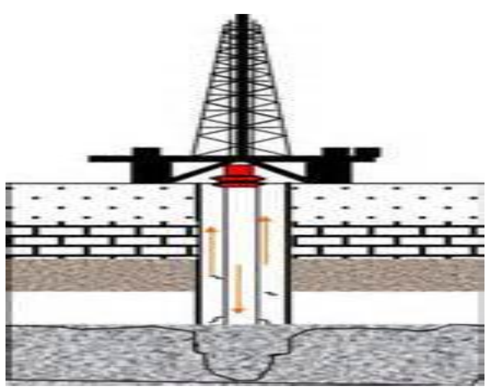


Figura 1.3 Perforación de un pozo

Ejemplo 1.10.- Pemex necesita renovar un tramo de tuberías de $2253Km$. La empresa tuberías ACME vende el producto a $\$1.25USD/metro$ y la empresa tuberías EMCA lo vende a $\$2000USD/milla$. Si fuera gerente de compras, ¿a qué compañía le compraría y porque?

Solución utilizando R&K.

1. Leer.- *longitud de tuberías, costos, conversión de unidades*
2. Explorar.- $l = 2253\text{Km}$, $\text{C}_1 = \$1.25USD/m$, $\text{C}_2 = \$2000USD/milla$

Figura 1.4 Renovación de tuberías

3. Estrategia.- Calcular la longitud total de la tubería en metros, los costos de cada compañía, hacer una conversión de unidades
4. Resolver.- Se procede a calcular la longitud total de la tubería en metros, y después se calculará el costo total para cada compañía, debiendo hacer una conversión de unidades para EMCA.

$$l = 2253\text{Km} = 2{,}253{,}000\text{m}$$

El costo con la compañía ACME será:

$$\text{C}_{\text{T1}} = (\text{l})(\text{C}_1) = \$2{,}816{,}250\text{USD}$$

Para la segunda compañía debemos considerar que $1mi = 1609m$, por lo que

$$\text{C}_2 = \frac{\$2{,}000}{\text{mi}} = \$1.2426\text{USD/m}$$

El costo con la compañía EMCA será:

$$C_{T2} = (l)(C_2) = \$2{,}799{,}577.8\mathrm{USD}$$

Por lo que debe comprarle a EMCA.

Extender.- ¿cuáles serían las pérdidas si se elige la empresa equivocada?

Si se compra la tubería a la compañía ACME las pérdidas serían de

$$\Delta C = C_1 - C_2 = \$16{,}672.2\mathrm{USD}$$

Problemas contextualizados propuestos.- conversión de unidades.

1. Resolver los siguientes ejercicios utilizando el Algoritmo 1.1

a) $96min\ a\ hrs$

b) $2\ días\ a\ horas$

c) $3.8Km\ a\ m$

d) $20Km\ a\ mi$

e) $25.61pld\ a\ cm$

f) $50ft\ a\ m$

g) $28lb\ a\ Kg$

2. Resolver los siguientes ejercicios utilizando el Algoritmo 1.2.

a) $48m/s\ a\ Km/hr$

b) $95mi/hr\ a\ Km/hr$

c) $256ft/s\ a\ m/s$

3. Resolver los siguientes ejercicios utilizando el Algoritmo 1.1.

a) $3.7812m^2\ a\ ft^2$

b) $80.3624ft^2\ a\ m^2$

c) $15\ acres\ a\ ft^2$

4. Resolver los siguientes ejercicios utilizando el Algoritmo 1.1.

a) $326\ ft^3\ a\ cm^3$

b) $14.236cm^3\ a\ plg^3$

5. Un tanque hermético contiene aceite comestible con un nivel de $1.2m$ sobre la base. La presión que ejerce el aire que se encuentra sobre el aceite es de $21lbf/plg^2$. Si la densidad del aceite es de $0.91gr/cm^3$. Calcular la presión en la base del tanque en:

   a) kgf/cm^2

   b) Pa

6. Un evaporador que concentra lodo de perforación opera al vacío y tiene instalado un vacuómetro que indica una lectura de $32cmHg$. Convierta la presión a

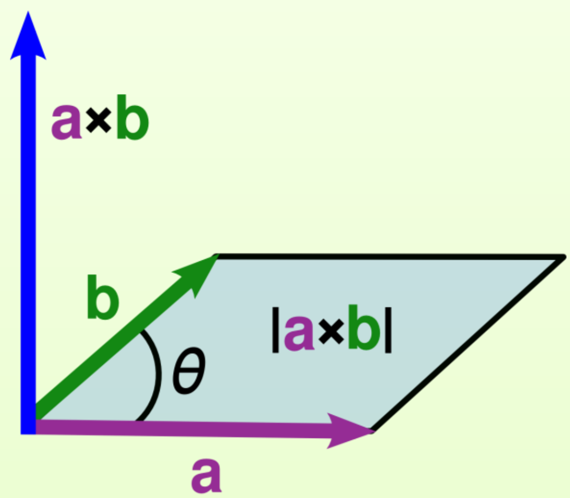
   a) KPa

   b) lbf/plg^2

7. Halliburton va a perforar un pozo y necesita $4870m^3$ de fluido de perforación. La empresa Varits vende el galón a $\$2.53\ dls$ y la empresa Benton la vende a $\$8\ el\ litro$. Si fuera gerente de compras, ¿a qué compañía le compraría y porque?, ¿cuáles serían las pérdidas si se elige la empresa equivocada?

8. Un empresario desea comprar $5000 lts$ de gasolina, sin embargo la gasolinera vende la gasolina en botes de $30\,gal$. ¿Cuántos botes debe comprar? Explique su respuesta.
9. Un motor de una bomba de fluidos de perforación consume $450 KWatts$ cuando trabaja a su máxima potencia. Un ingeniero indica que su motor (de $600 HP$) consume menos energía. Indique si está de acuerdo o no con el Ingeniero y explique su respuesta.
10. La compañía petrolera BrP publica que ha encontrado un yacimiento de petróleo en las costas mexicanas. Su ingeniero de exploración ha calculado que el yacimiento tiene una presión de $45{,}000 psi$ y menciona que no tendrán problemas para perforarlo ya que un pozo perforado hace dos meses en Brasil tenía una presión semejante $(350{,}000\,KPa)$. El gerente toma la decisión de no perforar. ¿Considera que el gerente tomó una buena decisión? Explique su respuesta.
11. Hallton extrae crudo desde un pozo a razón de $235{,}000\,barriles$ diarios, el gerente de producción dice que al aplicar un nuevo método la producción podría ser de $164{,}170\,galones$ diarios. Si el precio del barril es $\$107.76\,dls$, diga si la propuesta del gerente es aceptable y cuánta ganancia o pérdida generaría a la compañía.
12. Wateord desea comprar bentonita para un fluido especial, la empresa FLUX.S.A vende el kilogramo a $\$4{,}500.00$ y la empresa BENTOX.S.A la vende a $\$9{,}900.00$ por libra. La empresa desea comprar $400\,sacos$ de $25 Kg$. ¿A qué empresa le debe comprar y por qué?
13. Un empresario desea importar sus refacciones para barrenas. Una compañía americana le dice que el producto que desea lo vende a $\$32.3 USD$. Una compañía europea le dice que se lo puede vender a $€28.9$. Si necesita $200\,piezas$, ¿a qué compañía le debe comprar? Tome $\$1 USD = \$15.48$ y $€1 = 17.20$.
14. La compañía GEMS desea vender su bentonita, tiene en sus bodegas $157.8 Ton$ y las introduce en sacos de $60 Kg$. Perfo´s quiere comprar todo el producto y se lo pagará a $\$0.26\,la\ onza$, y Petro´s le ofrece comprarla a $\$4\ la\ libra$. ¿a qué compañía le conviene vender?
15. Se va a estimular un pozo para aumentar su producción. Mediante un método convencional se pueden producir $50{,}000\,bbl/s$ adicionales. Una compañía extranjera propone un nuevo método y asegura que la producción tendrá $2{,}090{,}000 gal/s$. ¿Qué método le aconsejaría utilizar al gerente?

Capítulo II. Algebra de Vectores



2.1 Funciones trigonométricas
2.1.1 Teorema de Pitágoras
2.2 Magnitudes escalares y vectoriales
2.2.1 Multiplicación de un escalar por un vector
2.2.2 Descomposición de un vector en sus componentes
2.2.3 Operaciones básicas con vectores (suma y resta)
2.2.3.1 Método gráfico y analítico
2.3 Producto punto y producto cruz
2.4 Aplicaciones

Funciones Trigonométricas

Definición 2.1.- Un radián θ es la medida del ángulo central de un círculo subtentido por un arco igual en longitud al radio del círculo.

Definición 2.2.- La longitud de arco s de una circunferencia de radio r que subtiende un ángulo central de θ radianes, ese define como

$$s = r\theta$$

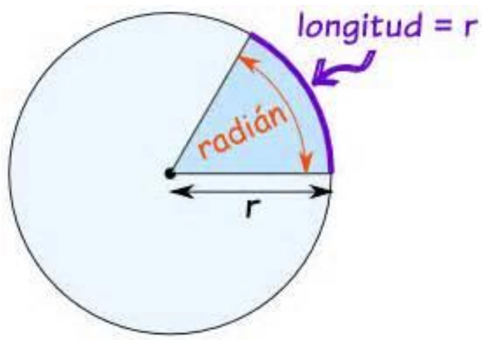


Figura 2.1 Longitud de arco

Definición 2.3.- Si θ es la medida en radianes de un ángulo central de una circunferencia de radio r, entonces el área de un sector circular determinado por θ, se define como

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

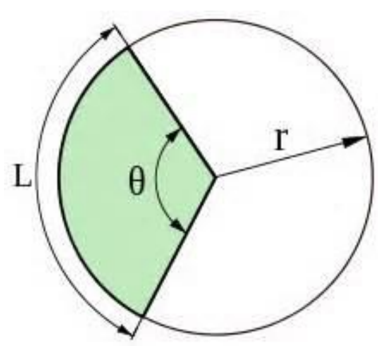


Figura 2.2 Definición de sector de área

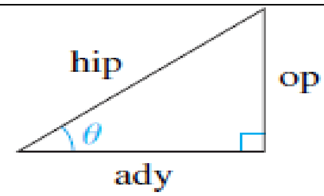
Definición 2.4.- La velocidad angular y la velocidad lineal de una partícula que describe una circunferencia de radio r están dadas por

$$\omega = \mathrm{r}\theta \qquad \text{Velocidad angular}$$

$$\mathrm{V} = \omega\mathrm{r} \qquad \text{Velocidad lineal}$$

Definición 2.5.- Las funciones trigonométricas se definen, a partir del triángulo rectángulo, como se muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Definición de funciones trigonométricas básicas

$\mathrm{sen}\theta = \dfrac{\mathrm{op}}{\mathrm{hip}}$	$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{ady}}{\mathrm{hip}}$	$\tan\theta = \dfrac{\mathrm{op}}{\mathrm{ady}}$	
$\csc\theta = \dfrac{\mathrm{hip}}{\mathrm{op}}$	$\sec\theta = \dfrac{\mathrm{hip}}{\mathrm{ady}}$	$\mathrm{ctg}\theta = \dfrac{\mathrm{ady}}{\mathrm{op}}$	

Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras se define de acuerdo al triángulo rectángulo de la Tabla 3.1 y se representa con la expresión:

$$\mathrm{hip}^2 = \mathrm{ady}^2 + \mathrm{op}^2$$

De este teorema se derivan algunas identidades trigonométricas:

$\boldsymbol{\cos\theta^2 + \mathrm{sen}\theta^2 = 1}$	$\boldsymbol{sec\theta^2 = 1 + tan\theta^2}$	$\boldsymbol{\csc\theta^2 = 1 + \mathrm{ctg}\theta^2}$

Figura 2.3 Representación de Pitágoras

Magnitudes escalares y vectoriales

Método gráfico y analítico

Multiplicación de un escalar por un vector

Ahora analizaremos algunas propiedades de los vectores de una manera muy sencilla, haciendo uso de papel milimétrico, un transportador y lápiz. Sigamos el siguiente procedimiento.

1.- Considere un vector $\vec{A}$ cuya magnitud es de $10\mathrm{u}$, en el plano xy. Utilice papel milimétrico y trace el vector (con una inclinación aproximada de 45°) utilizando una regla. Asegúrese de que la longitud de la flecha sea de $10\mathrm{u}$. Trace desde la punta de la flecha, una línea perpendicular al eje x (se forman las componentes). Ahora cuente el número aproximado de cuadritos tanto en x como en y.

2.- Trace el vector $(2\vec{A})$, utilice la misma hoja milimétrica y proceda como en el punto 1, ¿Qué ocurrió con las componentes del vector?

3.- Trace el vector $\left(\frac{1}{2}\vec{A}\right)$. Proceda como en el punto 2. El cambio en las componentes ¿Es semejante al punto 2? ¿Cuál sería su conclusión de estos 3 puntos?

4.- Trace el vector $(-3\vec{A})$. Proceda como en el punto 1. ¿Qué ocurre con el vector? ¿Puede predecir qué ocurriría con $\left(-\frac{1}{3}\vec{A}\right)$?

Con base a estas actividades, escriba una regla para el producto de un escalar con un vector.

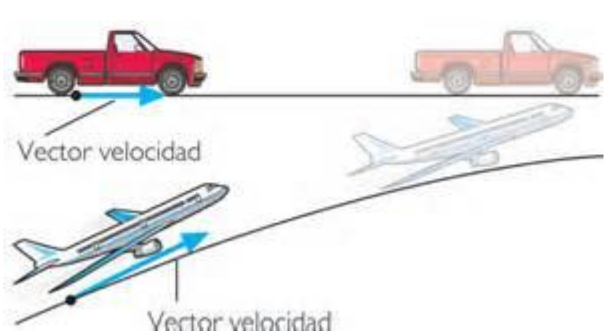


Figura 2.4 Representación de vectores

Método del paralelogramo.

Revisaremos ahora un método sencillo para sumar vectores. Este consiste en colocar uno de los vectores en el origen, en la punta de éste se coloca el segundo vector y así sucesivamente. El vector resultante es el vector que parte del origen y llega a la punta del último vector de la serie. Para estos casos, es útil el papel milimétrico y el transportador.

Ejemplo 2.1.- Sea $\vec{A} = 10\text{u}$; $\theta = 45^{\circ}$ y $\vec{B} = 15\text{u}$; $\theta = 70^{\circ}$. Encuentre el vector resultante por el método paralelogramo, utilice transportador. Ver Figura 2.5.

Solución.

Paso 1. Trace el vector $\vec{A}$ y cuente el número de cuadritos en x y en y. Ahora, en la punta de la flecha de $\vec{A}$ coloque imaginariamente, un nuevo sistema de coordenadas y trace el vector $\vec{B}$; cuente el número de cuadritos en x y en y de $\vec{B}$.

Paso 2. El vector resultante $\vec{R}$ se encuentra trazando un vector desde el origen hasta la punta de la flecha del vector $\vec{B}$, cuente el número de cuadritos de $\vec{R}$, tanto en x como en y. Si analiza los tres vectores, ¿puede encontrar una relación entre ellos? ¿puede escribirlo matemáticamente?

Paso 3. Si se anexa un vector $\vec{C}$, ¿Cómo cambiaría su modelo matemático?, haga la prueba con $\vec{C} = 20\text{u}$; $\theta = 150^{\circ}$.

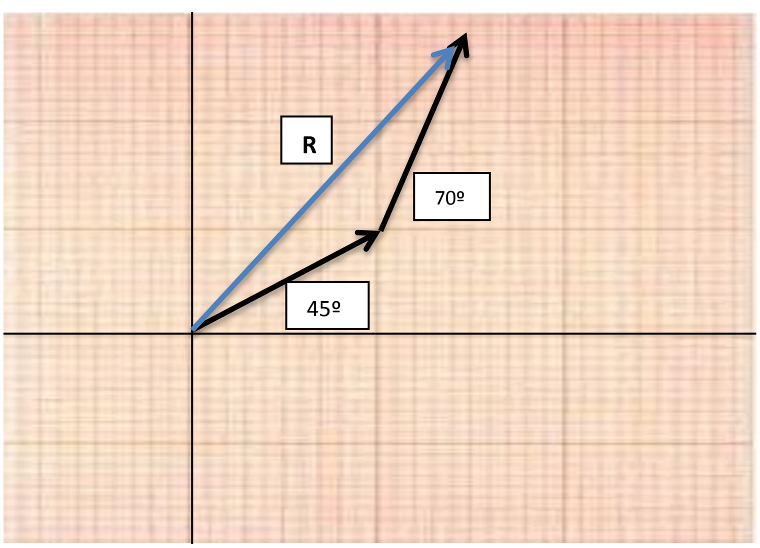


Figura 2.5. Suma de vectores con el método gráfico

Definición de Sistemas de Coordenadas Cartesianas

Los sistemas de coordenadas son importantes porque no ayudan a ubicar objetos, describir su comportamiento, realizar mediciones entre otras cosas. Analizaremos algunas propiedades aritméticas de los pares coordenados y cómo están relacionados con los vectores.

Definición 2.6.- Sea $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, pares ordenados del plano cartesiano. La suma de P_1 y P_2 se define como $P_3 = P_1 + P_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_{2,} y_1 + y_2)$.

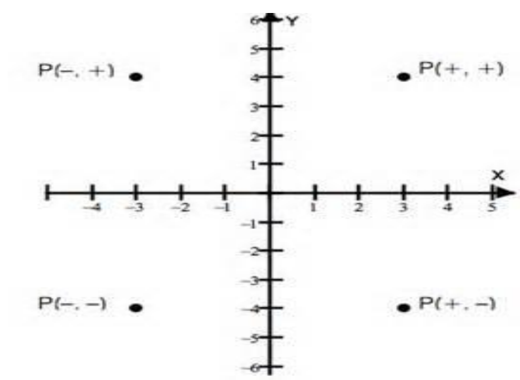


Figura 2.6 Sistema de coordenadas

Ejemplo 2.2.- Sea $P_1 = (2{,}4)$ y $P_2 = (3{,}5)$, entonces

$$P_3 = P_1 + P_2 = (2{,}4) + (3{,}5) = (2 + 3{,}4 + 5)$$

$$P_3 = (5{,}9).$$

Ejemplo 2.3.- Sea $P_1 = (-7{,}3)$ y $P_2 = (-3, -3)$. Encuentre la diferencia de los puntos. Localice el resultado en el plano cartesiano.

Solución.

$$P_3 = P_1 + P_2 = (2{,}4) - (3{,}5) = (-1, -1)$$

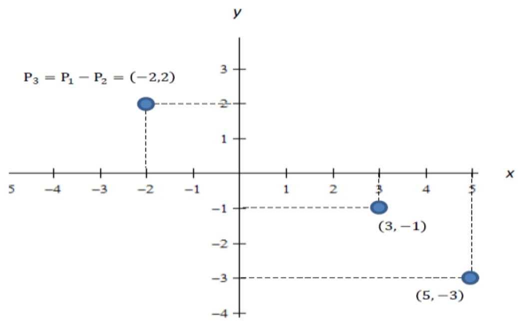


Figura 2.7 Representación de puntos en el plano

La diferencia de estos puntos, es el punto que se encuentra en el segundo cuadrante.

Definición de vectores unitarios

Sea $P_3 = (3,5)$; un punto en el plano coordenado. Hemos visto que $P_3 = P_1 + P_2$, entonces el punto P_3 puede obtenerse de la suma de otros pares coordenados, por ejemplo

$$P_1 = (3,5) = (2,2) + (1,3) = (-1,4) + (4,1)$$

Puede derivarse una gran variedad de combinaciones, sin embargo existe una combinación que es muy fácil de manejar

$$(3,5) = (3,0) + (0,5) = 3(1,0) + 5(0,1)$$

de aquí, definimos los vectores unitarios como:

$$\hat{\imath} = (1,0)\ ;\quad \hat{\jmath} = (0,1)$$

el vector $\hat{\imath}$ corresponde a un vector de longitud “1” y se encuentra sobre el eje x; el vector $\hat{\jmath}$ corresponde a un vector de longitud “1” y se encuentra sobre el eje y.

Por lo que

$$(3,5) = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}.$$

Podemos observar que hay una asociación entre puntos en el plano cartesiano y los vectores. La ventaja de los vectores es que aportan más información que las coordenadas. Para el caso de tres dimensiones (Figura 2.8) se procede de manera semejante, por lo que se anexa un tercer vector unitario; el sistema en tres dimensiones quedaría así

$$\hat{\imath} = (1,0,0)\ ;\quad \hat{\jmath} = (0,1,0);\ \hat{k} = (0,0,1)$$

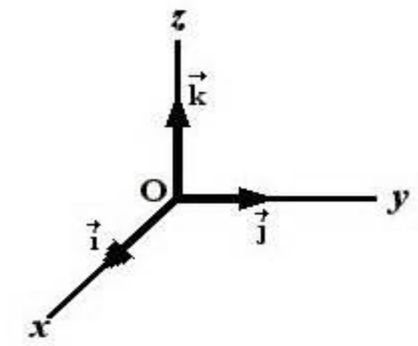


Figura 2.8 Vectores unitarios en tres dimensiones

Operaciones básicas con vectores (suma y resta)

Considerando las definiciones, propiedades de las coordenadas y de los vectores podemos definir la suma vectorial como:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}$$
$$\vec{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath}$$

$$\vec{R} = \left(\sum R_x\right)\hat{\imath} + \left(\sum R_y\right)\hat{\jmath}$$

Esto indica que para realizar una suma vectorial es necesario conocer sus componentes. Puede observarse también que la suma vectorial se realiza de manera semejante a la suma de coordenadas (Figura 2.9).

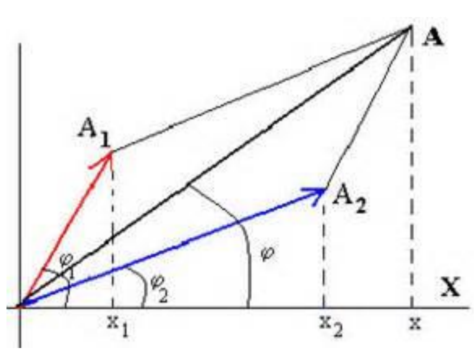


Figura 2.9 Suma vectorial

De la Figura 2.7 se desprende que el vector resultante corresponde a la flecha negra y la dirección está representada con φ, el ángulo más pequeño que forma con el eje horizontal.

Nota: No se pueden sumar de manera directa las magnitudes de los vectores, primero se deben calcular las componentes.

Ejemplo 2.4.- Encuentre la suma de los vectores que se indican a continuación:
$\vec{A} = 200\hat{\imath} + 150\hat{\jmath}$; $\vec{B} = -300\hat{\imath} + 100\hat{\jmath}$; $\vec{C} = -150\hat{\imath} - 220\hat{\jmath}$

Solución.-

La suma se realiza ordenando los vectores de tal manera que puedan sumarse las respectivas coordenadas de cada vector.

$$\vec{A} = 200\hat{\imath} + 150\hat{\jmath}$$
$$\vec{B} = -300\hat{\imath} + 100\hat{\jmath}$$
$$\vec{C} = -150\hat{\imath} - 220\hat{\jmath}$$

$$\vec{R} = -250\hat{\imath} + 30\hat{\jmath}$$

$\vec{R}$ representa el vector resultante. En la siguiente sección se mostrará cómo calcular la magnitud y dirección de manera cuantitativa.

Magnitud y dirección de un vector

Si se conocen las componentes de un vector, la magnitud (tamaño de la flecha) se obtiene con el teorema de Pitágoras y la dirección del vector con la función tangente:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$tg\theta = \left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Ejemplo 2.5.- Dado $\vec{A} = 8\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$; $\vec{B} = -5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ y $\vec{C} = -2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$

a) Encuentre la magnitud y dirección de cada vector.
b) Determine la magnitud y dirección del vector resultante. Utilice el método analítico y el método gráfico. Verifique que ambos métodos sean consistentes.

Solución.

a) $|\vec{A}| = \sqrt{8^2 + (-3)^2} = \sqrt{73}$ $\qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{-3}{8}\right) = -20.56^{\circ}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$ $\qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{-2}{-5}\right) = 21.80^{\circ}$

$|\vec{C}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40}$ $\qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{6}{-2}\right) = -71.56^{\circ}$

b) $|\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| = |\hat{\imath} + \hat{\jmath}| = \sqrt{2}$ $\qquad \theta = tg^{-1}(1) = 45^{\circ}$

El método gráfico se debe realizar con papel milimétrico y su juego de geometría. Queda al estudiante la finalización de este ejemplo.

Descomposición de un vector en sus componentes

Vectores y su asociación con la geometría

Hemos visto que un vector se puede escribir como $\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}$, si nos enfocamos solo a las longitudes de los vectores, vemos que tiene asociado un triángulo rectángulo, del cual podemos asemejar sus catetos con las componentes en x y en y; la hipotenusa corresponde a la magnitud del vector $\vec{V}$. Si se conocen la magnitud del vector y su dirección, las componentes pueden calcularse como:

$$\cos\theta = \frac{V_x}{V} \qquad\qquad \sin\theta = \frac{V_y}{V}$$

entonces $V_x = V\cos\theta$ y $V_y = V\sin\theta$.

Ejemplo 2.6.- Sea $\vec{A} = 280\mathrm{N}$, $\theta_1 = 60^{\circ}$ y $\vec{B} = 120\mathrm{N}$, $\theta_2 = 30^{\circ}$. Encuentre:

a) las componentes horizontal y vertical para cada vector,
b) la magnitud y dirección del vector resultante $(\vec{A} + \vec{B})$.

Solución.- Calculamos las componentes de cada vector:

$$A_x = A\cos\theta = 280\cos(60) = 140\,N$$

$$A_y = A\sin\theta = 280\sin(60) = 242.4871\mathrm{N}$$

Para el segundo vector:

$$B_x = B\cos\theta = 120\cos(30) = 103.923\mathrm{N}$$

$$B_y = B\sin\theta = 120\sin(30) = 60\,N$$

Ahora se calcula el vector resultante

$$\vec{A} = 140\hat{\imath} + 242.4871\hat{\jmath}$$
$$\vec{B} = 103.923\hat{\imath} + 60\hat{\jmath}$$

$$\vec{R} = 243.923\hat{\imath} + 302.4871\hat{\jmath}$$

La magnitud y dirección del vector resultante se calcula de la siguiente manera.

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 388.5831N$$

$$\tan\theta = \left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$
$$\theta = tan\left(\frac{R_y}{R_x}\right)^{-1} = 51.11º$$

Diagramas de barra

La suma de vectores también se puede realizar de manera cualitativa utilizando diagramas de barras. Para ello se utiliza una hoja de papel milimétrico y se divide en dos partes, utilizamos la parte superior y a su vez se divide en 4 partes, como se muestra en la Figura 2.10. La sección izquierda se usara para las coordenadas en x de cada vector y la sección derecha para las coordenadas en y; en la parte central se deja dos espacios para las componentes del vector resultante.

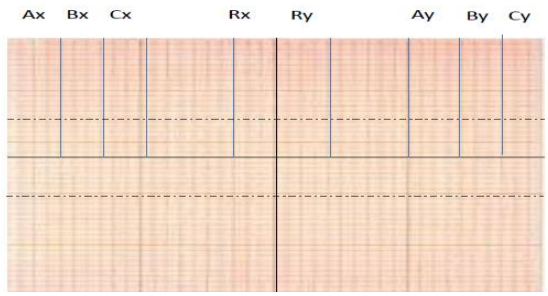


Figura 2.10 Representación de barras para suma de vectores

Ejemplo 2.7.- Dado $\vec{A} = 200\text{N}$, $\theta_1 = 40^\circ$; $\vec{B} = 350\text{N}$, $\theta_2 = 60^\circ$ y $\vec{C} = 400\text{N}$, $\theta_3 = 30^\circ$. Encuentre la suma de los vectores utilizando el método analítico y el diagrama de barras.

Solución.

Se procede a calcular las componentes de cada vector:

$$A_x = A\cos\theta = 200\cos(40) = 153.2\,N$$

$$A_y = A\sin\theta = 200\sin(40) = 138.55\text{N}$$

$$B_x = B\cos\theta = 350\cos(60) = 175\,N$$

$$B_y = B\sin\theta = 350\sin(60) = 303.1\text{N}$$

$$C_x = -C\cos\theta = -400\cos(30) = 346.41\,N$$

$$C_y = C\sin\theta = 400\sin(30) = 200\text{N}$$

En la Figura 2.11 se muestran los vectores a sumar.

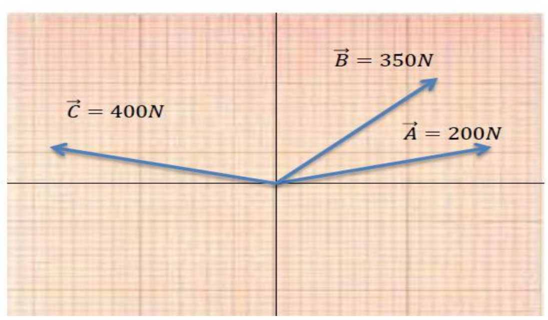


Figura 2.11 Trazo de vectores en el papel milimétrico

Para trabajar con los diagramas de barras, se calculan las componentes de cada vector, por ejemplo $A_x = 153.2\text{N}$ y $A_y = 128.55\text{N}$. Ahora eligen una escala para determinar la altura de la barra (lo ancho puede ser 2Δ) por ejemplo $1\blacksquare = 10\text{N}$, entonces la altura de la barra $A_x = 15$■ y para $A_y = 13$■ .Se procede de manera semejante con los otros vectores.

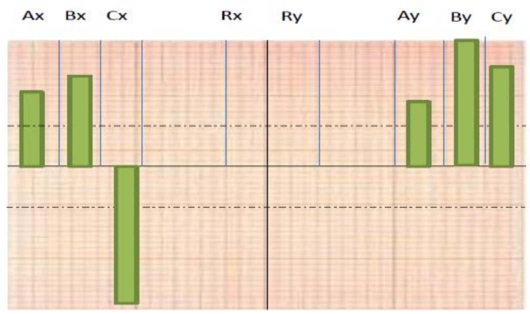


Figura 2.12 Diagrama de barras para sumar vectores

De esta manera se puede visualizar directamente el posible signo y tamaño de las componentes del vector $\vec{R}$ (Figura 2.12); su componente horizontal será más pequeña que su respectiva componente horizontal. Esta herramienta visual permite a los estudiantes comprender una forma clara y sencilla la suma de vectores, a su vez permite a los estudiantes pasar de un modelo matemático a uno geométrico.

Ejemplo 2.8.- Un remolcador arrastra a un barco Panamax para cruzar el canal de Panamá (Figura 2.10). Si la fuerza resultante ejercida sobre los cables, debido al remolcador, es de 50,000lb a lo largo del eje vertical, determine:

a) la tensión en cada una de las cuerdas sabiendo que el ángulo (para ambos cables) es de 50º
b) realice el diagrama de barras.

Solución.

Figura 2.13 Tensión en los cables del remolcador

Sea $\overrightarrow{T_1} = T_1\cos(\theta)\,\hat{\imath} + T_1\sin(\theta)\hat{\jmath}$ la tensión en la cuerda de la derecha; $\overrightarrow{T_2} = -T_2\cos(\theta)\,\hat{\imath} + T_2\sin(\theta)\hat{\jmath}$ la tensión en la cuerda de la izquierda (Figura). Como la resultante se encuentra en el eje vertical, la componente $R_x = 0$. Entonces:

$$
\begin{array}{rl}
 & \overrightarrow{T_1} = T_1\cos(\theta)\,\hat{\imath} + T_1\sin(\theta)\,\hat{\jmath} \\
+ & \overrightarrow{T_2} = -T_2\cos(\theta)\,\hat{\imath} + T_2\sin(\theta)\hat{\jmath} \\
\hline
 & \vec{R} \;=\; 0\hat{\imath} \quad + \quad 2T\sin(50)\hat{\jmath} = 50000
\end{array}
$$

Despejando la tensión será

$$T = \frac{50000}{2\sin(50)} = 32{,}635.1822lb$$

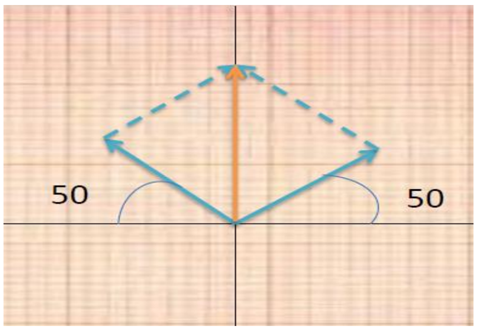


Figura 2.14 Suma de tensiones del remolcador

El diagrama de barras se representa en la Figura 2.12. Puede observarse que la suma de barras muestra claramente que las componentes horizontales son iguales y opuestas, por tal razón se cancelan. La resultante solo tiene componente vertical, de aquí se obtiene el valor de la tensión en cada cuerda.

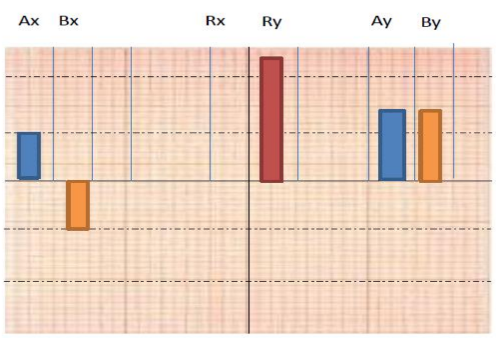


Figura 2.15 Representación de la suma vectorial con barras

Producto punto y producto cruz

Producto punto

Definición 2.7.- El producto punto o escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en R^3 es el escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores, de forma que $0 \leq \theta \leq \pi$.

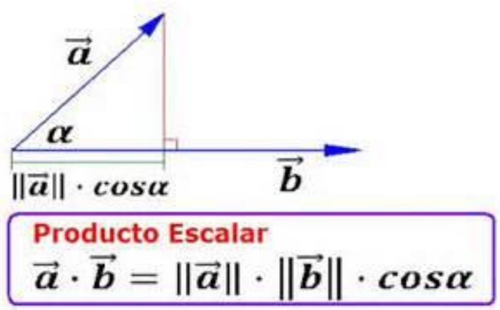


Figura 2.16 Representación del producto punto

Ejemplo 2.9.- De la Definición 2.7 se obtiene $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = 1, \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = 1, \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$. Puesto que

$$\|\hat{\imath}\| = \|\hat{\jmath}\| = \|\hat{k}\| = 1$$

y, en cada caso, $\cos \theta = 1$.

Otra forma de representar este producto es la siguiente.

Definición 2.8.- Sea $\vec{A} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ y $\vec{B} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}$, entonces

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Ejemplo 2.10.- Si $\vec{A} = 10\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 6\hat{k}$ y $\vec{B} = \frac{-1}{2}\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, calcular $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

Solución.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 10\left(\frac{-1}{2}\right) + 2(4) + (-6)(-3) = 21.$$

El producto escalar posee las siguientes propiedades.

i) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ si $\vec{A} = \vec{0}$ o $\vec{B} = \vec{0}$

ii) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ (ley conmutativa)

iii) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ (ley distributiva)

iv) $\vec{A} \cdot (k\,\vec{B}) = (k\,\vec{A}) \cdot \vec{B} = k(\,A \cdot \vec{B})$ k es un escalar

v) $\vec{A} \cdot \vec{A} \geq 0$

vi) $\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2$

Teorema 2.1.- Dos vectores no nulos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son ortogonales si, y sólo si, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0; \qquad \hat{k} \cdot \hat{\imath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = 0.$$

Ejemplo 2.11.- Si $\vec{A} = -3\hat{\imath} - \hat{j} + 4\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 14\hat{j} + 5\hat{k}$, calcular $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-3)(2) + (-1)(14) + (4)(5) = 0$$

De acuerdo al Teorema 2.1, se concluye que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son ortogonales.

Ejemplo 2.12.- El producto escalar es conmutativo, entonces

$$\hat{\imath} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{\imath} = 0$$

El producto punto también es útil para encontrar el ángulo entre dos vectores.

Ejemplo 2.13.- Sean $\vec{A} = 5\hat{\imath} - \hat{j} + 7\hat{k}$ y $\vec{B} = -3\hat{\imath} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$. Encuentre el ángulo más pequeño que hay entre ellos.

Tomando las definiciones 2.7 y 2.8 podemos llegar a

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = 70°$$

Producto Cruz.

Definición 2.9.- El producto cruz o vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en R^3 es el vector

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \sin\theta\right)\vec{n}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores de forma $0 \leq \theta \leq \pi$ y $\vec{n}$ es un vector unitario perpendicular al plano que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cuya dirección está dada por la regla de la mano derecha.

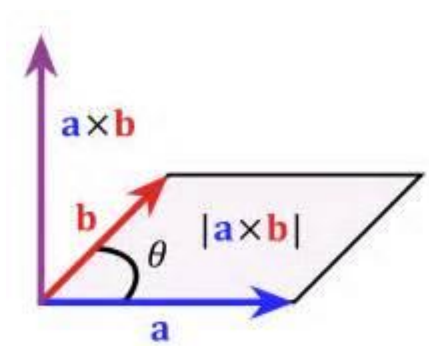


Figura 2.17 Representación del producto cruz

Definición 2.10.- Sea $\vec{A} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ y $\vec{B} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}$ entonces el producto cruz entre dos vectores se define como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\hat{k}$$

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades.

i) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$, $\vec{A} = \vec{0}$ o $\vec{B} = \vec{0}$

ii) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

iii) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$ (leyes distributivas)

iv) $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \times \vec{C}) + (\vec{B} \times \vec{C})$

v) $\vec{A} \times (k\vec{B}) = (k\vec{A}) \times \vec{B} = k(\vec{A} \times \vec{B})$ k escalar

vi) $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$

vii) $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

viii) $\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

Teorema 2.2.- Dos vectores no nulos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos si, y sólo si

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0$$

Ejemplo 2.14.- Los vectores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ son vectores paralelos entre si, porque

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \vec{0},$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \vec{0}$$

$$\hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}.$$

Ejemplo 2.15.- Los productos vectoriales de cualquier par de vectores en el conjunto $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ es

$$\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k},$$

$$\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$

$$\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}.$$

Ejemplo 2.16.- Sea $\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{B} = -6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 3\hat{k}$, determine si los vectores son paralelos.

Solución

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = [1(3) - (-1)(-3)]\hat{\imath} - [2(3) - (-1)(-6)]\hat{\jmath} + [2(-3) - (1)(-6)]\hat{k} = \vec{0}$$

por lo tanto, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos.

Ejemplo 2.17.- Ejemplo: Sea $\vec{A} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ y $\vec{B} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$, encuentre $\vec{A} \times \vec{B}$.

Solución

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \hat{k}$$

Por lo que: $\vec{A} \times \vec{B} = -3\hat{\imath} + 19\hat{\jmath} + 10\hat{k}$.

Aplicaciones

Cuando una fuerza constante de magnitud F mueve a un objeto una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el trabajo realizado es simplemente $W = Fd$. Sin embargo, si una fuerza constante $\vec{F}$ aplicada a un cuerpo actúa en un ángulo θ con respecto a la dirección del movimiento, entonces el trabajo realizado por $\vec{F}$ se define como el producto de la componente de $\vec{F}$ en la dirección del desplazamiento y la distancia $\|\vec{d}\|$ que el cuerpo se mueve, ver Figura 2.13, entonces:

$$W = \left(\|\vec{F}\| \cos\theta\right)\|\vec{d}\| = \|\vec{F}\|\|\vec{d}\| \cos\theta.$$

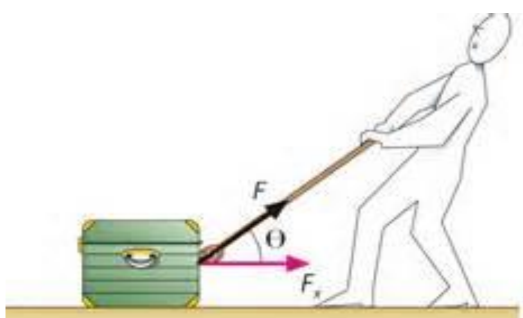


Figura 2.18. Trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$.

De la definición del producto escalar, se concluye que si $\vec{F}$ causa un desplazamiento $\vec{d}$ de un cuerpo, entonces el trabajo realizado es

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Donde $\vec{F}$ representa el vector fuerza aplicado al objeto, y $\vec{d}$ representa el desplazamiento. Las unidades del trabajo son Nm.

Ejemplo 2.18.- Encuentre el trabajo realizado por una fuerza constante $\vec{\mathrm{F}} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ si su punto de aplicación sobre un bloque se mueve de $\mathrm{P}_1(1,1)$ a $\mathrm{P}_2(4,6)$. Suponga que $\|\vec{\mathrm{F}}\|$ se mide en newtons y $\|\vec{\mathrm{d}}\|$ en metros.

Solución: El desplazamiento del bloque está dado por

$$\vec{\mathrm{d}} = \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$$

De aquí, que el trabajo realizado es $\mathrm{W} = (2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) \cdot (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}) = 26\ \mathrm{Nm}.$

Ejemplo 2.19.- La figura 2.14, muestra la fuerza que el viento ejerce sobre un velero. Encuentre la componente de la fuerza en la dirección en la cual viaja el velero.

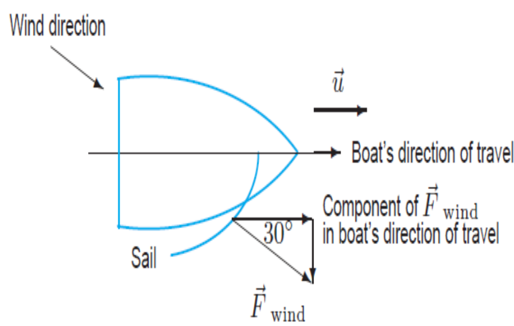


Figura 2.19. Velero sujeto a la fuerza del viento

Solución.- Sea $\hat{u}$ un vector unitario en la dirección de la travesía. La fuerza del viento forma un ángulo de 30º con respecto a la dirección de viaje. Así que la componente de la fuerza en esta dirección está dado por

$$\overrightarrow{F_p} = (\vec{F} \cdot \hat{u})\vec{u} = |\vec{F}|\cos(30)\,\vec{u} = 0.87|\vec{F}|\vec{u}$$

Esto significa que el bote es empujado hacia adelante con una fuerza cercana al 87% de la fuerza total del viento. La interacción real del viento con el bote es mucho más complicada, sin embargo es un buen ejemplo para introducir las utilidades del producto punto.

Definición 2.11.- Una línea de corriente es una línea en el flujo que posee la siguiente propiedad: el vector velocidad de cada partícula que ocupa un punto en la línea de corriente es tangente a ella

$$\vec{v} x \overrightarrow{dr} = \vec{0}$$

Ejemplo 2.20.- Determine la velocidad de una partícula de fluido en el origen y en el punto $(1, -2, 0)$ para el campo de velocidad indicado, cuando $t = 2s$. Todas las distancias están en metros y t en segundos.

$$\vec{V} = (x+2)\hat{\imath} + xt\hat{\jmath} - z\hat{k};\, en\; m/s$$

Solución. Para obtener el vector velocidad, evaluamos en $t = 2s$, y el vector desplazamiento será $\overrightarrow{dr} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}$.

$$\vec{V} = (1+2)\hat{\imath} + (1)(2)\hat{\jmath} - 0\hat{k} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}\; m/s$$

$$\vec{V} \times \overrightarrow{dr} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \hat{\mathrm{j}} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \hat{\mathrm{k}}$$

$$\vec{v} \times \overrightarrow{dr} = 0\hat{\mathrm{i}} + 0\hat{\mathrm{j}} - 8\hat{\mathrm{k}}$$

Esto indica que el campo no es una línea de corriente.

Ejemplo 2.21.- Para el campo de velocidades y el vector desplazamiento de la línea de flujo, determine si una partícula dentro de ese campo pertenece a una línea de corriente, utilizando la Definición 2.11.

a) $\vec{v} = -6\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 6\hat{k}$ y $\overrightarrow{dr} = -3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 3\hat{k}$.
b) $\vec{v} = 5\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\overrightarrow{dr} = 3\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - 3\hat{k}$.

Solución.-

a) $\vec{v} \times \overrightarrow{dr} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ -6 & 6 & -6 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} - \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \hat{\mathrm{j}} + \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \hat{\mathrm{k}}$

$$\vec{v} \times \overrightarrow{dr} = 0\hat{\mathrm{i}} + 0\hat{\mathrm{j}} + 0\hat{\mathrm{k}}$$

Esto indica que sí es una línea de corriente.

b)

$$\vec{v} \times \overrightarrow{dr} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ 5 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \hat{\mathrm{j}} + \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \hat{\mathrm{k}}$$

$$\vec{v} \times \overrightarrow{dr} = -2\hat{\mathrm{i}} + 21\hat{\mathrm{j}} + 47\hat{\mathrm{k}}$$

Como el producto cruz es diferente de cero, el campo no es una línea de corriente.

Problemas propuestos.

1. Sea $\vec{A} = 10\text{N}$, $\theta = 50^{\circ}$; $\vec{B} = 80\text{N}$, $\theta = 120^{\circ}$ y $\vec{C} = 50\text{N}$, $\theta = 200^{\circ}$.

   a) Utilice el método gráfico y el papel milimétrico para encontrar $\vec{R}$.

   b) Verifique que los resultados sean consistentes entre sí.

2. Sea $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ y $\vec{C} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - \hat{k}$. Encuentre el vector o el escalar indicados.

   a) $\left(2\vec{B}\right) \cdot \left(3\vec{C}\right)$

   b) $\left(2\vec{A}\right) \cdot \left(\vec{A} - 2\vec{B}\right)$

   c) $\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{C} \cdot \vec{C}}\right)\vec{B}$

3. Determine un escalar c de manera que los vectores $\vec{A} = 2\hat{\imath} - c\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ sean ortogonales entre sí.

4. Encuentre un vector $\vec{V} = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + \hat{k}$ que sea ortogonal tanto a $\vec{A} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ como a $\vec{B} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$.

5. Determine un escalar c de manera que el ángulo entre $\vec{A} = \hat{\imath} + c\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ sea de 45°.

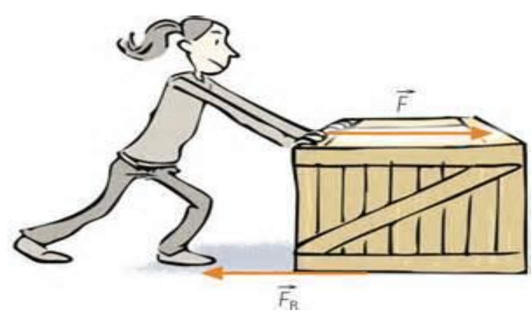
6. Un trineo se jala horizontalmente sobre el hielo con una cuerda atada a su parte frontal. El trineo se mueve 100 pies gracias a una fuerza de 20 libras que actúa en un ángulo de 60° con respecto a la horizontal. Encuentre el trabajo realizado.

7. Encuentre el trabajo realizado si el punto en el que la fuerza constante $\vec{F} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ se aplica a un objeto y éste se mueve de $P_1(3,1,-2)$ a $P_2(2,4,6)$. Considere que $\|\vec{F}\|$ se mide en newtons y $\|\vec{d}\|$ en metros.

8. Un bloque de peso $\vec{w}$ se jala a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por medio de una fuerza constante $\vec{F}$, de magnitud 30 newtons, en la dirección dada por el vector $\vec{d}$. Véase la figura 2. Considere que $\|\vec{d}\|$ se mide en metros.

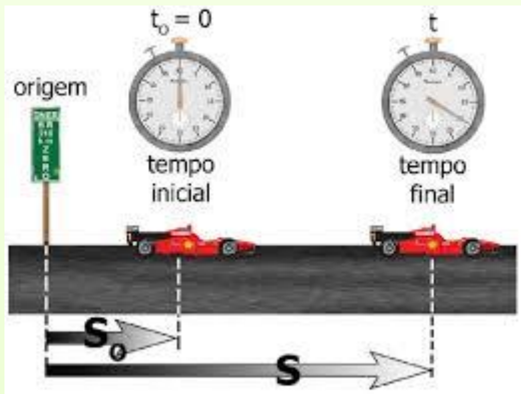
   a) ¿Cuál es el trabajo realizado por el peso $\vec{w}$?

   b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ si $\vec{d} = 4\hat{\imath} + 3j$?



9. Encuentre $\vec{A} \times \vec{B}$.
   c) $\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{B} = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$.
   d) $\vec{A} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 5\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$.
10. Encuentre un vector que sea perpendicular tanto $\vec{A}$ como a $\vec{B}$, donde $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ y $\vec{B} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$.
11. Sea $\vec{A} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{C} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$, calcule $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$.
12. Dado $\vec{A} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{C} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$, determine:
   a) $(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}$
   b) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$
13. Determine el vector unitario normal a la línea de corriente en un punto donde $V = -3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ en un flujo plano.
    a) $0.6\hat{\imath} - 0.8\hat{\jmath}$
    b) $-0.6 + -0.8\hat{\jmath}$
    c) $0.8\hat{\imath} - 0.6\hat{\jmath}$
    d) $0.8\hat{\imath} + 0.6\hat{\jmath}$
14. Calcule el ángulo que el vector velocidad forma con el eje horizontal; y un vector unitario normal a la línea de corriente (1,-2) en los siguientes campos de velocidades cuando t=2s. Todas las distancias están en metros y t en segundos.
    a) $V = (x + 2)\hat{\imath} + xt\hat{\jmath} - z\hat{k};\ \text{en}\ \frac{m}{s}$
    b) $V = xy\hat{\imath} - 2y^2\hat{\jmath} - tyz\hat{k};\ \text{en m/s}$

Capítulo III. Movimiento Rectilíneo uniforme y acelerado



Movimiento rectilíneo y acelerado

Identificando el Movimiento Rectilíneo Uniforme

Nota: Para todas las actividades que se realizarán, deberán formarse equipos de cuatro estudiantes como máximo.

En física, como en otras ciencias, para poder describir el comportamiento de un objeto es necesario tomar en cuenta algunas consideraciones, una de ellas es que los objetos los consideramos como partículas puntuales, es decir que no se considera el tamaño ni la forma del objeto para su estudio. Aunque esto sólo puede hacerse en caso muy especiales, para los fines de este libro consideraremos en todos los casos objetos puntuales.

Objeto puntual.- cuando no se necesita tomar en cuenta el tamaño del objeto para resolver un problema, se puede representar como un objeto puntual. Este punto tendrá todas las propiedades del objeto excepto el tamaño y forma, al cual se le llama *objeto puntual*. Podemos considerar objetos reales como objetos puntuales en dos circunstancias: a) cuando todas sus partes se mueven de la misma manera, b) cuando los objetos son mucho más pequeños las dimensiones del proceso descrito en el problema.

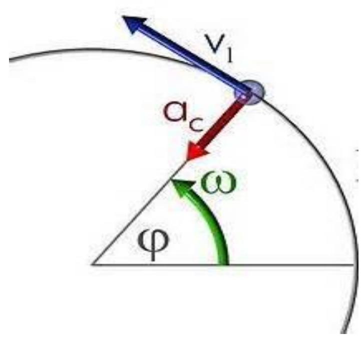


Figura 3.1 Partícula puntual

Cantidad física.- Una cantidad física es una característica de un fenómeno físico que puede ser medida. Un instrumento de medición es usado para realizar un comparativo cuantitativo de esta característica y una unidad de medida. Ejemplos de cantidades físicas son tu altura, la velocidad de tu carro o la temperatura del aire o agua. Si una característica no tiene una unidad, no es una cantidad física.

La posición x, es una localización de un objeto relativo a un cero elegido en un sistema coordenado.

Intervalo de tiempo.- el intervalo de tiempo es la diferencia entre dos lecturas de reloj. Si representamos una lectura de tiempo como t_1 y otra lectura como t_2, entonces el intervalo de tiempo entre esas dos lecturas de reloj es $\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1$. Otra forma de escribir esta declaración es: $\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1 = \Delta\mathrm{t}$.

El símbolo Δ es la letra griega delta, en física y matemáticas se lee como delta t $(\Delta\mathrm{t})$ o el cambio en t. El tiempo puede medirse en muchas unidades diferentes, como segundos, minutos, horas, días, años, siglos, etc.

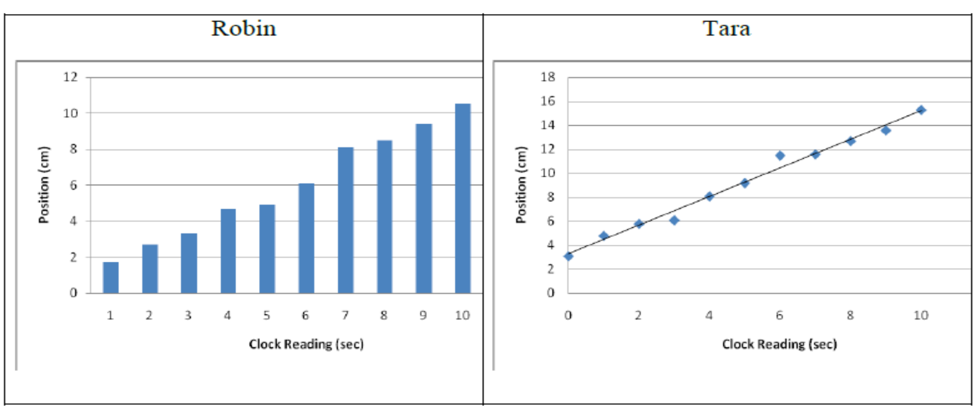
Definición de velocidad

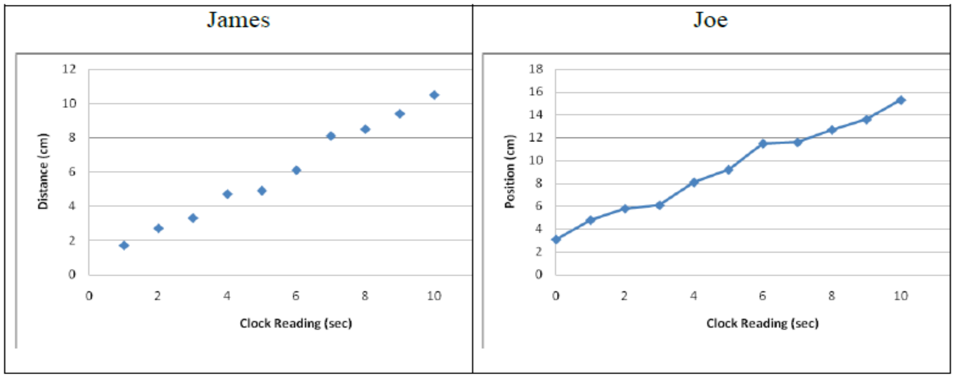
Relación con la pendiente de una recta

Ejemplo 3.1.- Análisis de datos en diferentes representaciones.

a) Robin, James, Tara y Joe (en reposo con respecto uno del otro) recolectaron datos para el movimiento del mismo carro. Cada uno representó los datos de forma distinta. Examine las cuatro representaciones de abajo; seleccione una representación que representaría mejor la posición del carro en función del tiempo. Explique.

b) Discute tu elección y las razones con tus compañeros de clase.





Ejemplo 3.2.- En la figura de abajo se muestran las imágenes de un caracol moviéndose a lo largo de una mesa. Se utiliza una regla para medir la posición del caracol después de cada segundo. Fotografías como estas sirven para medir la velocidad de diversos objetos.

a) Elija un sistema de medición para esas fotografías
b) Registre la posición del caracol para cada segundo. ¿Qué suposiciones debe hacer?
c) Elabore un diagrama de puntos del movimiento del caracol
d) ¿Cómo se vería su diagrama si el movimiento fuera en $8s$ en vez de $4s$?
e) ¿Cómo calcularía la pendiente de la recta? ¿Representa una cantidad física?

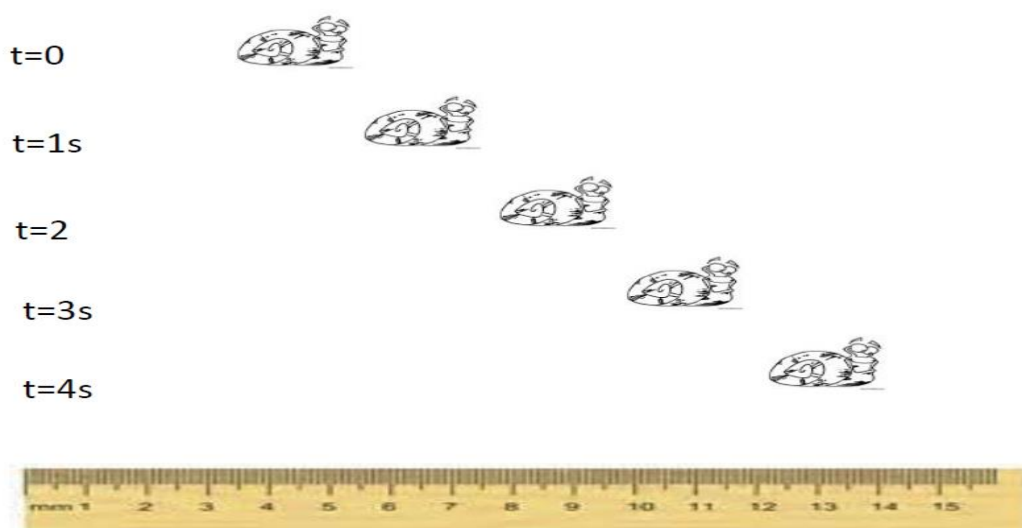


Figura 3.2 Movimiento de un caracol

De acuerdo al ejemplo 3.2, se puede deducir una definición de la velocidad de un objeto que se mueve en el tiempo, además se debe recalcar que la pendiente de la recta proporciona información importante sobre el movimiento y dirección del objeto.

Definición 3.1.- La velocidad promedio de una partícula se define como la razón de cambio de su desplazamiento Δx con respecto al intervalo de tiempo Δt:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

La velocidad se mide, en S.I, en m/s. Cuando el cambio del desplazamiento, con respecto al tiempo, se realiza de manera uniforme se dice que el objeto viaja a velocidad constante, así la ecuación anterior se reduce a

$$\bar{v} = \frac{x}{t} = cte$$

Si reducimos el intervalo de tiempo, podemos conocer la velocidad en un intervalo de tiempo muy pequeño, es decir hacemos $\Delta t \to 0$ asi que

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{dx}{dt}$$

A lo cual se le llama velocidad instantánea. La velocidad es una cantidad vectorial; su magnitud se llama rapidez, el cual es un escalar y es lo podemos ver en el velocímetro de un automóvil. La velocidad puede tener signo positivo o negativo, un cambio en su signo implica un cambio en la dirección del movimiento del objeto. El caso trivial es cuando $\vec{v} = \vec{0}$, implicando que el objeto se encuentra en reposo.

Graficas tiempo-posición

Las gráficas son herramientas muy importantes para todas las áreas de las ciencias e ingenierías, ya que a través de ellas se pueden interpretar mejor los datos obtenidos de un experimento. En los ejemplos 3.1 y 3.2, se analizaron representaciones de datos en cuatro formas diferentes, obteniendo resultados muy semejantes. En esta sección aprenderá a realizar gráficos para interpretar los datos coleccionados de un experimento dado, así también identificar la función matemática que podría modelarlos.

Ejemplo. 3.3.- Imagina que te encuentras manejando una bicicleta en la orilla de un rio. La tabla indica tu posición a lo largo del camino recorrido a diferentes intervalos de tiempo. Con base a ello:

a) Escriba todo lo que pueda para describir esa serie de datos y busque un patrón
b) Construya una gráfica tiempo-posición, describa su comportamiento
c) Escriba el modelo matemático que los describa
d) ¿Cuál es el significado de la pendiente? Explique el significado de los valores positivos y negativos
e) Calcule la velocidad promedio para cada par de datos.

Tiempo	Posición
0	640
20	500
40	360
60	220
80	80
100	-60
120	-200

Ejemplo 3.4 En la tabla de abajo, se proporciona una serie de datos que describen el movimiento, sobre una pista en el aire, de un planeador de juguete.

a) Elabore una gráfica tiempo-posición con esos datos. Explique el significado de la pendiente
b) Encuentre el modelo matemático que describe el movimiento del planeador

Tiempo	Posición
0.000	0.01
0.133	0.07
0.267	0.13
0.400	0.20
0.533	0.26
0.667	0.33
0.800	0.9

Movimiento acelerado

Características del movimiento acelerado

Ejemplo 3.5.- Suponga que coloca un carrito sobre una pista suave de metal inclinada a 10º con respecto a la horizontal. La tabla de datos proporciona los registros de la posición de la parte de enfrente del carro a diferentes tiempos. El eje x está a lo largo de la pista.

a) Analice los datos y observe si hay un patrón
b) Elabore una gráfica tiempo-posición. ¿Qué forma tiene la gráfica?
c) ¿Cómo se comportan los datos en este caso?
d) Calcule la velocidad promedio para cada par de datos y observe cómo se comporta la velocidad.

Tiempo	Posición
0	0
0.5	0.21
1.0	0.85
1.5	1.91
2.0	3.40
2.5	5.31

Ejemplo 3.6.- utilice una pelota de Voleibol o basquetbol. Colóquela en una superficie horizontal lisa, láncela y observe su movimiento. Al momento de lanzarla, coloque una bolsita de arena a lado de la pelota cada segundo, de esta manera se obtiene la posición de la pelota, hasta que se detenga. Proceda a medir la distancia que hay entre cada par de bolsitas, regístrelos en una tabla y proceda a graficarlos.

a) ¿Qué tipo de curva presentan los datos?
b) ¿Qué comportamiento presenta el movimiento de la pelota?
c) ¿Qué modelo matemático podría describir los datos?

Definición 3.2.- La aceleración promedio de una partícula en el intervalo de tiempo Δt, se define como el cociente entre el cambio de la velocidad promedio y el intervalo de tiempo indicado:

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

La aceleración se mide, en S.I, en m/s^2.

Si reducimos el intervalo de tiempo, podemos conocer la aceleración en un intervalo de tiempo muy pequeño, es decir hacemos $\Delta t \to 0$ asi que

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

A lo cual se le llama aceleración instantánea. Como se puede ver, la aceleración mide el cambio de la velocidad de un objeto, por tal razón es una cantidad vectorial. La aceleración tiene sus respectivas interpretaciones, y surgen tres casos concretos: aceleración positiva, aceleración negativa y aceleración nula (asumiendo en todos los casos que siempre será constante; podemos tener también aceleraciones variables pero no son caso de estudio en este libro). En el primer caso, si consideramos un automóvil que se mueve horizontalmente hacia la derecha (Figura 3.3) con a>0, implica que la velocidad aumentará progresivamente. Esto lo puede observar en el velocímetro de su carro cuando la aguja se mueve en dirección de las manecillas del reloj. El segundo caso, implica que la velocidad disminuye uniformemente, y puede llegar a detenerse. En este caso, las agujas del velocímetro se mueven en dirección contraria a las manecillas del reloj. El tercer caso es cuando la aceleración es nula; aquí surgen dos casos, el primero es que la velocidad sea constante y el segundo que se encuentre en reposo. Es importante señalar que si la aceleración es cero no implica forzosamente que se encuentre en reposo, ya que puede moverse a velocidad constante. A esto se le llama condición de equilibrio traslacional.

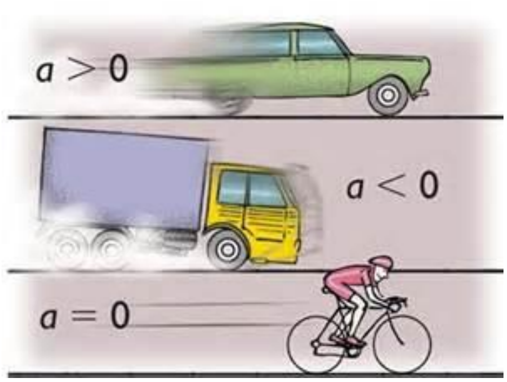


Figura 3.3 Tipos de aceleraciones

Movimiento circular

El movimiento rectilíneo uniforme puede tener las siguientes variantes: velocidad, constante, aceleración constante o aceleración variable. Esta última, aunque se trata de los movimientos naturales más comunes en la vida cotidiana, debido a su complejidad no se tratan en este libro introductorio. Los primeros dos casos, ocurren en la naturaleza en ciertas ocasiones y bajo condiciones especiales. Otro tipo de movimiento que podemos encontrar, es el movimiento circular; el cual puede ser uniforme o no uniforme.

Definición 3.3.- Cuando un objeto se mueve en una trayectoria circular con velocidad tangencial (lineal) constante, recibe el nombre de movimiento circular uniforme. El vector velocidad siempre es tangente a la curva y perpendicular al radio de la trayectoria.

Se debe mencionar que existen, al menos dos tipos de velocidad en este movimiento: la velocidad lineal (o tangencial) y la velocidad angular. Así también, existen dos tipos de aceleraciones: la tangencial y la centrípeta, la cual es responsable de que los objetos no se salgan de su trayectoria (cuando se sobre pasan las condiciones, entonces puede ser que el objeto salga de la trayectoria). La aceleración centrípeta, se define matemáticamente como:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Donde r, representa el radio de la curva. La aceleración tangencial se relaciona con la Definición 3.2. De esta manera, la aceleración total queda como:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_r} + \vec{a}_t$$

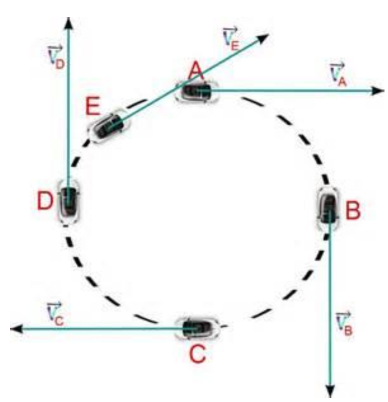


Figura 3.4 Representación del movimiento circular

Ejemplo 3.7.- Un punto sobre una tornamesa en rotación a $20cm$ del centro acelera desde el reposo hasta $0.7m/s$ en $1.75s$. En $t = 1.25s$, encuentre la magnitud y dirección de:

a) la aceleración centrípeta

b) la aceleración tangencial

c) la aceleración total.

Solución.

Consideramos los datos del problema: $r = 0.20m$; $V = 0.7m/s$; $t = 1.75s$. Para resolver el a) utilizamos:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(0.7m/s)^2}{0.2m} = 2.45m/s$$

Para encontrar la aceleración tangencial, hacemos uso de las ecuaciones del movimiento acelerado:

$$a_t = \frac{v - v_0}{t} = 0.4m/s$$

Y para la aceleración total:

$$a_T = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = 2.48m/s^2$$

Ejemplo 3.8.- En el ciclo de centrifugado de una máquina lavadora, el tubo de $30cm$ de radio gira a razón de $630rpm$. ¿Cuál será la máxima velocidad lineal con la que sale el agua de la máquina?

Solución. Consideramos los datos del problema: $r = 0.3m$, $\omega = 630rpm$. Para calcular la velocidad lineal, convertimos las revoluciones por minuto a radianes por segundo.

$$\omega = 630rpm\left(\frac{2\pi rad}{1rev}\right)\left(\frac{1min}{60s}\right) = 65.9734rad/s$$

Por lo que, la velocidad lineal será:

$$v = \omega r = 19.792m/s$$

Características del MC

La velocidad angular es una medida de la velocidad de rotación. Se define como el ángulo girado por una unidad de tiempo y se designa mediante la letra griega ω. Su unidad en el S.I, es el radián por segundo (rad/s). Aunque se la define para el movimiento de rotación del sólido rígido, también se la emplea en la cinemática de la partícula o punto material, especialmente cuando esta se mueve sobre una trayectoria cerrada (circular, elíptica, etc).

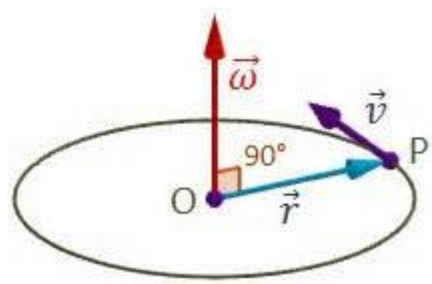


Figura 3.5 Representación de la velocidad angular

Matemáticamente se define como

$$\omega = 2\pi\vartheta = \frac{2\mu}{T}$$

Donde ϑ es la frecuencia en Hertz, T es el periodo en segundos, ω se mide en rad/s y se relaciona con la velocidad lineal mediante la expresión (ver Figura 3.5):

$$v = \vec{\omega}x\vec{r}$$

Otra definición de utilidad es la aceleración angular de una partícula:

$$\alpha = (\omega - \omega_0)/t$$

Lo cual representa el cambio en la velocidad angular, algo semejante a la definición de la aceleración lineal.

Ejemplo 3.9.- Un hombre hace girar una honda desde el reposo durante $10s$, con una aceleración de $\pi rad/s^2$, momento en el cual suelta la cuerda para dejar salir el proyectil. ¿A qué velocidad sale despedido éste si la cuerda mide $60cm$?

Solución.

Ordenando los datos tenemos: $\alpha = \pi rad/s^2$; $t = 10s$; $r = 0.6m$

$$\omega = \alpha t = (\pi)(10) = 31.416rad/s$$

Entonces la velocidad lineal es:

$$v = \omega t = 18.85m/s$$

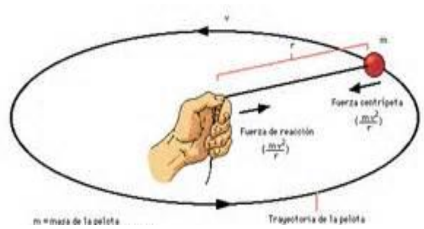


Figura 3.6 Representación de la honda

Problemas propuestos.

1. Un piloto de avión bien entrenado puede soportar una aceleración de hasta 8 veces el valor de la gravedad, durante tiempo breves sin perder el conocimiento. Para un avión que vuela a 2300Km/h , ¿cuál será el radio de giro mínimo que puede soportar?
2. La estación espacial internacional gira con una velocidad angular constante alrededor de la Tierra cada 90min en una órbita de 300Km de altura sobre la superficie terrestre. Calcular:
    a. La velocidad angular
    b. La velocidad lineal
    c. ¿Tiene aceleración? ¿Qué características tendría?
3. Un carrusel gira a 30rpm. Calcula la velocidad angular y la velocidad lineal de un caballito que esté a 1.5m del centro y de otro que esté a 2m.
4. Un automóvil circula a 20m/s describiendo una trayectoria circular de 20m de radio. Calcular:
    a. La aceleración centrípeta
    b. La velocidad angular
    c. La velocidad lineal
5. Un carro de juguete que se mueve con rapidez constante completa una vuelta alrededor de una pista circular (200m) en 25s.
    a. ¿Cuál es su rapidez?
    b. Si la masa del carro es de 1.5Kg, ¿cuál es la magnitud de la fuerza central?
6. Mientras dos astronautas estaban en la superficie de la luna, un tercer astronauta daba vueltas a su alrededor. Suponga que la órbita es circular y se encuentra a 100Km sobre la superficie de la luna. Si la masa y el radio de la luna son $7.4x10^{22}$Kg y $1.7x10^{6}$m, respectivamente, determine:
    a. La aceleración del astronauta en órbita
    b. Su velocidad lineal
    c. Su periodo
    d. Su velocidad angular
7. Un halcón vuela en un arco horizontal de 12m de radio a una rapidez constante de 4m/s. Encuentre:
    a. La aceleración centrípeta
    b. El periodo
    c. Su velocidad angular
    d. El halcón continúa volando en el mismo arco pero, su aceleración cambia a 1.2m/s2. ¿Cuál su velocidad lineal?

Bibliografía

1. Zill, D. Dewer, J (2008). Matemáticas avanzadas para ingeniería 2. Calculo vectorial, análisis de Fourier y análisis complejo. Mc Graw Hill, 3ra Ed, México.
2. Seway, R (2010). Física para ciencias e ingeniería. Prentice Hall, México.
3. Van Heuvelen, A. Etkina, E (2006). The physics active learning guide. Pearson Addison Wesley, USA.
4. Beer, F. Russell, E. Cornwell, P (2010). Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica. Mc Graw Hill, México.
5. Beer, F. Russell, E. Cornwell, P (2010). Mecánica vectorial para ingenieros. Estática. Mc Graw Hill, México.
6. Potter, M. Wiggert, D(2002). Mecánica de fluidos. Thomson, 3ra Ed. México.

Anexo 1. Tabla de conversión de unidades.

LONGITUD					
metro m	milímetro mm	pulgada in (")	pie ft	yarda yd	milla (statute) mi
1	1000	39,3700787	3,2808399	1,0936133	0,00062137
0,001	1	0,0393701	0,0032808	0,0010936	0,00000062137
0,0254	25,4	1	0,08333	0,02777	0,000015782
0,3048	304,8	12	1	0,333	0,00018939
0,9144	914,4	36	3	1	0,00056818

SUPERFICIE					
metro cuadrado m^2	hectárea ha	pulgada cuadrada in^2	pie cuadrado ft^2	yarda cuadrada yd^2	acre
1	0,0001	1550,0031	10,76391	1,19599	0,00024711
10000	1	15500031	107639,1	0,0001196	2,4710538
0,0006,4516	0,00000006451	1	0,006944	0,0007716	0,00000015942
0,09290304	0,000009290351	144	1	0,111	0,000022957
0,8361274	0,000083613	1296	9	1	0,00020661
4046,856	0,4046856	6272640	43560	4840	1

VOLUMEN					
metro cúbico m^3	litro dm^3	pie cúbico ft^3	galón (USA) gal	galón imperial (GB) gal	barril de petróleo bbl (oil)
1	1000	35,3146667	264,17205	219,96923	6,2898108
0,001	1	0,0353147	0,2641721	0,2199692	0,0062898
0,0283168	28,3168466	1	7,4805195	6,2288349	0,1781076
0,0037854	3,7854118	0,1336806	1	0,8326741	0,0238095
0,0045461	4,5460904	0,1635437	1,20095	1	0,028594
1589873	158987295	56145833	42'	34,9723128	1
1 gal (USA) =3,78541 dm^3 1 ft^3=0,0283 m^3					

UNIDADES DE PRESION					
kilopascal kN /m^2	atmósfera técnica Kgf/cm^2	milímetro de c. Hg (0°C)	metros de c. agua (4°C)	libras por pulgada² lb/in^2	bar 100000 Pa
kPa	atm	mm Hg	m H_2O	psi	bar (hpz)
1	0,0101972	7,5006278	0,1019745	0,1450377	0,01
98,0665	1	735,560217	1000028	14,2233433	0,980665
0,1333222	0,0013595	1	0,0135955	193367	0,0013332
9,8063754	0,0999972	73,5539622	1	1,4222945	0,0980638
6,8947573	0,070307	51,7150013	0,7030893	1	0,0689476
100	1,0197162	750,062679	10,1974477	14,5037738	1
1 in H_2O (60°F = 15,55°C) = 0,248843 kP in H2O (60°F=20°C)=0,248641 kPa 1 atmósfera física (Atm)= 101,325 kPa=760 mm Hg in Hg (60°F=20°C)=3,37685 kPa 1 Torr= (101,325/760) kPa					